INSTITUT DE STATISTIQUE de l'Université Pierre et Marie Curie

Epreuve de Mathématique II

Durée 4 heures

Definitions et notations :

Pour tout couple (n , p) d'entiers non nuls , $M_{n,p}$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. On note $E_n = M_{n,n}$, $F_n = M_{n,1}$ et I_n la matrice unité d'ordre n .

Pour tout $M \in E_n$, on note $I(M) = \{MX | X \in F_n\}$, $N(M) = \{X \in F_n | MX = 0\}$.

Pour tout M de E_n , le polynôme caractéristique de M , noté $P_M(X)$, sera le déterminant de $M - XI_n$ On admettra que M annule son polynôme caractéristique.

On dira qu'une famille $(A_i, i = 1..p)$ de p éléments de E_n est un P-système si :

- Pour tout i de $[1 .. p]$, $A_i \neq 0$, $A_i^2 = A_i$.
- Pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[1 .. p]$, $A_i A_j = 0$.

On dira qu'une famille $(A_i, i = 1..p)$ de p éléments de E_n est un Q-système si :

- $(A_i, i = 1..p)$ est un P-système .
- $\sum_{i=1}^{p} A_i = I_n$.

On dira qu'une famille $(A_i, i = 1..p)$ de p éléments de E_n est un N-système si :

- Pour tout i de [1 .. p], il existe un entier k tel que : $A_i^k = 0$.
- Pour tout couple (i,j) d'éléments distincts de $[1 .. p]$, $A_i A_j = 0$.

PRELIMINAIRES.

1- Soient A et B deux éléments de E_n qui commutent. Démonter que :

$-\forall X \in I(A), BX \in I(A)$.

$-\forall X \in N(A), BX \in N(A)$.

2- Soit P un projecteur non nul de E_n. Montrer qu'il existe X non nul de F_n tel que PX = X.

3- Soit $(A_i, i = 1..k)$ un P-système de k éléments de E_n.

3-1 Démontrer que : $\sum_{i=1}^{k} A_i$ est un projecteur.

3-2 Démontrer que si $(A_i, i = 1..k)$ n'est pas un Q-système , il existe $A_0 \in E_n$ unique tel que $(A_i, i = 0..k)$ est un Q-système.

PARTIE I.

On considère l'élément M de E_2 défini par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1-1 Calculer le polynôme caractéristique de M.
1-2 Calculer les deux valeurs propres a_1 , a_2 de M avec $a_1 < a_2$.

2-1 Calculer deux matrices A_1 , A_2 de E_2 solution du système :
$A_1 + A_2 = I_2$, $a_1A_1 + a_2A_2 = M$.
2-2 Démontrer que le couple (A_1, A_2) est un Q-système.

3- On suppose qu'il existe deux réels b_1 et b_2, $b_1 < b_2$, et deux matrices B_1 , B_2 de E_2 tels que :
- (B_1, B_2) est un P-système.
- $M = b_1B_1 + b_2B_2$.

3-1 Soit X un élément non nul de F_2 tel que : $B_1X = X$. Calculer MX et en déduire :
$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$
3-2 On suppose que (B_1 , B_2) n'est pas un Q-système . Soit P l'élément de E_2 tel que (P , B_1 , B_2) est un Q-systéme et X non nul de F_2 tel que $PX = X$. Calculer MX .
En déduire que l'hypothèse '$B_1 + B_2$ différent de I_2' est contradictoire.
3-3 Montrer que : $A_1 = B_1$, $A_2 = B_2$.

PARTIE II.

On considère les deux éléments M et P de E_4 définies par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} , \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1-1 Calculer P^{-1} , MP , puis $P^{-1}MP$. (On expliquera la méthode utilisée pour le calcul de P^{-1})
1-2 Quelles sont les valeurs propres de M ?
1-3 Quelle est la dimension des sous-espaces propres associés?
1-4 La matrice M est-elle diagonalisable?

2- On considère le système d'équations :

$$\begin{aligned} I_4 &= A_1 + A_2 \\ M &= 2A_1 - A_2 + B_1 - B_2 \\ M^2 &= 4A_1 - A_2 + 4B_1 - 2B_2 \\ M^3 &= 8A_1 - A_2 + 12B_1 - 3B_2 \end{aligned}$$

dont les inconnues sont A_1 , A_2 , B_1 , B_2 dans E_4.
2-1 Exprimer A_1 , A_2 , B_1 et B_2 en fonction de M, sous la forme de polynôme factorisé de degré < 4.
2-2 Démontrer que le couple (A_1 , A_2) est un Q-système.
2-3 Démontrer que le couple (B_1 , B_2) est un N-système.

2-4 Démontrer les formules :

$A_1B_1 = B_1A_1 = B_1$, $A_2B_2 = B_2A_2 = B_2$, $A_1B_2 = B_2A_1 = 0$, $A_2B_1 = B_1A_2 = 0$.

(On pourra utiliser le fait que M annule son polynome caractéristique.)

2-5 Exprimer M^n, pour tout entier relatif n , en fonction de A_1 , A_2, B_1 , B_2 .

(On commencera par exprimer M^{-1} .)

3- Soit C_1 , C_2 , D_1 , D_2 quatre éléments de E_4 , $c_1 > c_2$ deux réels , qui vérifient :

- (C_1 , C_2) est un P-système.
- (D_1 , D_2) est un N-système.
- Pour i,j dans {1,2}, i différent de j , $C_iD_i = D_iC_i = D_i$, $C_iD_j = D_jC_i = 0$.
- $M = c_1C_1 + c_2C_2 + D_1 + D_2$.

3-1 Montrer qu'il existe X non nul dans F_4 tel que : $C_1X = X$ et $D_1X = 0$. Calculer MX .

En déduire : $c_1 = 2$ et $c_2 = 1$.

3-2 Démontrer que l'hypothèse ' (C_1 , C_2) n'est pas un Q-système ' est contradictoire.

On pourra s'inspirer de I-3-2.

3-3 Calculer M^2 et M^3 en fonction de C_1 , C_2, D_1 , D_2 .

3-4 En déduire que :

$C_1 = A_1$, $C_2 = A_2$, $D_1 = B_1$, $D_2 = B_2$.

PARTIE III.

Soient n , k deux entiers positifs non nuls , (a_i , i = 1 .. k) une famille de réels *tous non nuls*, rangés dans l'ordre *strictement* croissant , et (A_i , i = 1 .. k) un P-système dans E_n . On définit la matrice M de E_n par :

$$M = \sum_{i=1}^{k} a_i A_i .$$

1-1 Démontrer l'équivalence des trois propriétés :

- M est inversible.
- (A_i , i = 1 .. k) est un Q-système.
- $F_n = \bigoplus_{i=1}^{k} I(A_i)$

On suppose cette propriété réalisée dans la suite.

1-2 Pour i de [1 .. k] exprimer $N(A_i)$.

2-1 Montrer que M est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

2-2 Etudier l'unicité des familles (a_i , i = 1 .. k) et (A_i , i = 1 .. k) .